

Список літератури

1. Базилевский А.Н., Гузий А.Н. Моделирование поля информации в авиационных тренажерах. – К.: Знание УССР. – 1975. – 55 с.
2. Shield R.N. Flight Simulation with Wide Excursion Systems// World Aerospace Profile. – London, 1987. – P. 173 – 176.
3. Stark E.A., Wilson J.M. Visual and Motion Simulation in Energy Maneuvering// AIAA Paper. – 1973. – № 934. – P. 1 – 10.
4. Боднер В.А., Закиров Р.А., Смирнова И.И. Авиационные тренажеры. – М.: Машиностроение, 1978. – 192 с.
5. Сотников Д.А., Кабанячий В.В. Модели восприятия движения маневрирования самолета и их использование в задачах имитации движения на авиационных тренажерах// Безопасность полетов. – К.: КИИГА, 1986. – С. 77–83.

Стаття надійшла до редакції 17.04.01.

ББК В 653.330.561 + 6642.31 + 0530 - 042 - 011.248.642.31
УДК 532.526

В.І. Мамчук

ВИКОРИСТАННЯ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ ЧИСЛОВІЙ ПОБУДОВІ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ОБТІКАННЯ ПРОФІЛІВ

Наведено методику розрахунку поля швидкості на криловому профілі при обтіканні його плоским нестисливим потоком за допомогою автоматичної числової побудови системи криволінійних координат, зв'язаної з профілем, з використанням гармонічних функцій як складових загального відображення двозв'язної області на параметричний прямокутник.

Одним з основних чинників під час розв'язування практичних задач гідроаеромеханіки є розрахунок поля швидкостей на тілі, що обтікається, а також в певних областях, які прилягають до нього. Тому під час розв'язування таких задач головним є вміння з достатньою точністю розраховувати вектор фактичної швидкості в кожній точці течії методом автоматичної числової побудови загальної системи криволінійних координат, зв'язаної з тілом, з використанням гармонічних функцій.

Розглянемо обтікання крила літака потоком, всі частинки якого, що знаходяться на одному й тому ж перпендикулярі певної нерухомої площини, мають однаковий рух, паралельний цій площині, тобто плоский (двовимірний). Такий рух можливий лише тоді, коли тіла, що знаходяться в потоці, є нескінченно довгі циліндри, осі яких перпендикулярні до даної площини. У випадку достатньо довгих циліндричних тіл, як крило літака, ці умови наближено виконуються хоча б в областях тіла, що не дуже близькі від його кінців. Саме тіло визначається профілем свого нормального перерізу. Надалі будемо говорити про обтікання профілю. Вважатимемо, що потік нестисливий, $\rho = \text{const}$, тобто $\text{div } \mathbf{V} = V_{1x} + V_{2y} = 0$, де V_1, V_2 – координати вектора швидкості. За умов невихрового руху функція течії ψ задовольняє рівняння Лапласа

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \Delta\psi = 0, \quad (1)$$

при цьому

$$V_1 = \psi_y, \quad V_2 = -\psi_x. \quad (2)$$

На криловому профілі $\psi = \text{const}$ (наприклад, дорівнює нулю). Отже, розрахунок поля швидкості на криловому профілі в такому випадку зводиться до розв'язування рівняння Лапласа щодо функції течії з граничною умовою $\psi = 0$.

Отримавши числові розв'язки його та продиференціювавши їх згідно з рівнянням (2), отримаємо складові вектора швидкості, а обчисливши модуль вектора, матимемо шукану швидкість.

Для числового розв'язування задачі використаємо метод автоматичної числової побудови системи криволінійних координат із застосуванням гармонічних функцій [1].

Для відображення двозв'язної області G (рис. 1) на прямокутну область G' (рис. 2), в якій у подальшому розв'язуватиметься задача, слід побудувати перетворюючі функції

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

які визначають лінії рівня відображення на прямокутник $0 \leq \xi \leq ch$, $0 \leq \eta \leq dh$ перетвореної площини. За функції, що дають відображення (3), вибираємо гармонічні функції $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0; \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

з умовами Діріхле: $\eta = \eta_0 = \text{const}$ на Γ , $\eta = \eta_1 = \text{const}$ на Γ_1 .

Значення багатозначної $\xi(x, y)$ функції з гілкою $\xi(x, y)$ задаються вздовж координати ξ прямокутника на Γ , Γ_1 . Розв'язки системи рівнянь (4) породжують відображення

$$\xi(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y).$$

Зважаючи на те, що у випадку практичної реалізації відображення вихідними змінними є змінні ξ , η , то потрібно знайти відображення, яке було б обернене відображенню (2).

Оскільки $x = x(\xi, \eta)$, $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$,

то

$$\begin{cases} dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta; \\ dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy; \\ d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy. \end{cases}$$

Помножимо обидві частини першої рівності спочатку на η_x , а другої на мінус ξ_x , потім відповідно на η_y і мінус ξ_y та в обох випадках отримані рівності додавши почленно, отримаємо

$$\begin{cases} \eta_x d\xi - \xi_x d\eta = (\xi_y \eta_x - \eta_y \xi_x) dy; \\ \eta_y d\xi - \xi_y d\eta = (\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y) dx. \end{cases}$$

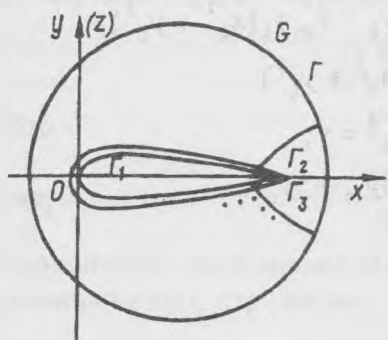


Рис. 1. Фізична площина

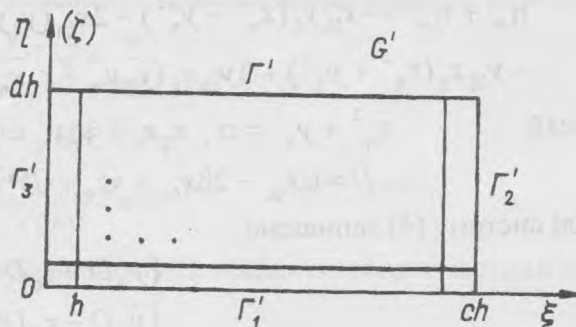


Рис. 2. Перетворена площина

Звідки

$$\begin{cases} dx = \frac{\eta_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} d\xi - \frac{\xi_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} d\eta; \\ dy = \frac{\eta_x}{\eta_x \xi_y - \xi_x \eta_y} d\xi - \frac{\xi_x}{\eta_x \xi_y - \xi_x \eta_y} d\eta. \end{cases}$$

Порівнюючи останні рівності із записом для dx і dy з іншого боку, можна відзначити, що

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}; \quad x_\eta = -\frac{\xi_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}; \quad y_\xi = -\frac{\eta_x}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}; \quad y_\eta = \frac{\xi_x}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}.$$

Так як

$$\frac{J(x, y)}{(\xi, \eta)} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{1}{D(\xi, \eta)} = \frac{1}{J(\xi, \eta)},$$

то

$$x_\xi = \eta_y (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}.$$

За аналогією $\eta_x = -\frac{y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}, \quad \xi_x = \frac{y_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}, \quad \xi_y = -\frac{x_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}.$

Вирази $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$, $J_1 = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ – якобіани перетворень

Знайдемо другі похідні

$$\xi_{xx} = \left(\frac{y_\eta}{J_1} \right)_\xi \xi_x + \left(\frac{y_\eta}{J_1} \right)_\eta \eta_x = \frac{1}{J_1^2} (y_{\eta\xi} J_1 - J_{1\xi} y_\eta) \xi_x + \frac{1}{J_1^2} (y_{\eta\eta} J_1 - y_\eta J_{1\eta}) \eta_x$$

або

$$\xi_{xx} = \frac{1}{J_1} (\xi_x y_{\xi\eta} + \eta_x y_{\eta\eta}) - \frac{y_\eta}{J_1^2} (\xi_x J_{1\xi} + \eta_x J_{1\eta});$$

$$\xi_{yy} = -\frac{1}{J_1} (\xi_y x_{\xi\eta} + \eta_y x_{\eta\eta}) + \frac{x_\eta}{J_1^2} (\xi_y J_{1\xi} + \eta_y J_{1\eta}).$$

Так як

то

Після аналогічних перетворень отримаємо

Нехай

Тоді систему (4) запишемо

Оскільки

$$\begin{vmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то

$$\begin{cases} D = 0; \\ D^* = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0; \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) є оберненою до системи (4) з перетвореними граничними умовами: $x = f_0(\xi, \eta_0)$ на Γ' , $y = \varphi_0(\xi, \eta_0)$ на Γ' , $x = f_1(\xi, \eta_1)$ на Γ'_1 , $y = \varphi_1(\xi, \eta_1)$ на Γ'_1 . Розв'язки цієї системи рівнянь утворюють відображення

При цьому крива Γ фізичної площини переходить на верхню границю Γ' в перетвореній площині. Аналогічно крива Γ_1 переходить в Γ'_1 , що лежить на нижній границі перетвореної площини. Ліва і права границі прямокутної області в фізичній площині співпадають. Крива, що переходить в ці границі, визначає розріз багатозначної функції $\xi = \xi(x, y)$. Ця крива з'єднує зовнішній контур Γ з внутрішнім контуром Γ_1 .

Відповідність відображення параметричного прямокутника G' на область G задамо точками на контурах Γ_1 , Γ :

(6)

На "вільному" розрізі з фіксованими кінцями умови періодичності, що виражають рівність функцій та їхніх похідних відповідного порядку на кінцях розрізу, запишемо

(7)

Положення вузлів (ξ_n, η_m) визначається за правилами $\xi_n = nh, n = \overline{0, c}$, $\eta_m = mh, m = \overline{0, d}$ де c, d , як і в рівняннях (6), (7) – кількість поділок сторін прямокутника (відповідно по ξ та η), що визначають його модуль $M_{\text{пр}} = \frac{c}{d}$. Кількість вузлів прямокутника визначається як $(c+1)(d+1)$. На тілі розміщено c точок.

Зробимо вхідні рівняння (1) безрозмірними. В процесі побудови розрахункової сітки за зовнішню границю (контур Γ) приймемо коло з радіусом, що дорівнює десяти хордам профілю, та центром на середині хорди. Координати точок відносилися до довжини хорди профілю. При цьому

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \bar{y} = \frac{y}{b} \text{ і } \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_0}.$$

Тобто

$$x = \bar{x}b, y = \bar{y}b, \psi = \bar{\psi}\psi_0.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 (\bar{\psi}\psi_0)}{\partial (\bar{x}b)^2} + \frac{\partial^2 (\bar{\psi}\psi_0)}{\partial (\bar{y}b)^2} = 0.$$

Якщо винести сталі множники за знак диференціалу та поділити обидві частини останнього рівняння на них, отримаємо

Для зручності риси опустимо і, запишемо рівняння $\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$, яке відповідно до зазначеної методики в системі координат (ξ, η) набуде вигляду

$$\alpha\psi_{\xi\xi} - 2\beta\psi_{\xi\eta} + \gamma\psi_{\eta\eta} = 0. \quad (8)$$

Якщо кут атаки нульовий, значення функції течії в точках зовнішнього контуру дорівнює ординатам відповідних точок (гранична умова для ψ на границі Γ).

Для числової реалізації відображення координатну сітку в площині (ξ, η) вибираємо рівномірною з кроком h в обох координатах і, враховуючи своєрідність області відображення, з метою раціонального складання програми апроксимацію необхідних похідних, що входять в рівняння (5), (8) та в формули ітераційного процесу, здійснюємо різницевиими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x_{\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi}]_{0,0} = \frac{x_{1,0} - x_{c-1,0}}{2h}; \quad x_{\eta} \approx [\hat{x}_{\eta}]_{0,0} = \frac{x_{0,2} + 4x_{0,1} - 3x_{0,0}}{2h}; \\ x_{\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi}]_{0,d} = \frac{x_{1,d} - x_{c-1,d}}{2h}; \quad x_{\eta} \approx [\hat{x}_{\eta}]_{0,d} = \frac{x_{0,d} - 4x_{0,d-1} + x_{0,d-2}}{2h}; \\ x_{\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi}]_{0,m} = \frac{x_{1,m} - x_{c-1,m}}{2h}; \quad x_{\eta} \approx [\hat{x}_{\eta}]_{0,m} = \frac{x_{0,m+1} - x_{0,m-1}}{2h}, \\ x_{\xi\eta} &\approx [\hat{x}_{\xi\eta}]_{0,m} = \frac{x_{1,m+1} - x_{c-1,m+1} + x_{c-1,m-1} - x_{1,m-1}}{4h^2}; \\ x_{\xi\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi\xi}]_{0,m} = \frac{x_{1,m} - 2x_{0,m} + x_{c-1,m}}{h^2}; \quad x_{\eta\eta} \approx [\hat{x}_{\eta\eta}]_{0,m} = \frac{x_{0,m+1} - 2x_{0,m} + x_{0,m-1}}{h^2}, \text{ якщо } m = \overline{1, d-1}; \\ x_{\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi}]_{n,m} = \frac{x_{n+1,m} - x_{n-1,m}}{2h}; \quad x_{\eta} \approx [\hat{x}_{\eta}]_{n,m} = \frac{x_{n,m+1} - x_{n,m-1}}{2h}; \\ x_{\xi\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi\xi}]_{n,m} = \frac{x_{n+1,m} - 2x_{n,m} + x_{n-1,m}}{h^2}; \\ x_{\xi\eta} &\approx [\hat{x}_{\xi\eta}]_{n,m} = \frac{x_{n+1,m+1} - x_{n-1,m+1} + x_{n-1,m-1} - x_{n+1,m-1}}{4h^2}; \\ x_{\eta\eta} &\approx [\hat{x}_{\eta\eta}]_{n,m} = \frac{x_{n,m+1} - 2x_{n,m} + x_{n,m-1}}{h^2}, \text{ якщо } n = \overline{1, c-1}, m = \overline{1, d-1}; \\ x_{\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi}]_{n,0} = \frac{x_{n+1,0} - x_{n-1,0}}{2h}; \quad x_{\eta} \approx [\hat{x}_{\eta}]_{n,0} = \frac{-x_{n,2} + 4x_{n,1} - 3x_{n,0}}{2h}, \text{ якщо } n = \overline{1, c-1}; \\ x_{\xi} &\approx [\hat{x}_{\xi}]_{n,d} = \frac{x_{n+1,d} - x_{n-1,d}}{2h}; \quad x_{\eta} \approx [\hat{x}_{\eta}]_{n,d} = \frac{3x_{n,d} - 4x_{n,d-1} + x_{n,d-2}}{2h}, \text{ якщо } n = \overline{1, c-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для інших функцій співвідношення аналогічні.

Нелінійну систему $3c(d-1)$ рівнянь з такою самою кількістю невідомих розв'язуємо згідно з [2], використовуючи явний ітераційний процес:

$$\begin{aligned} x_{n,m}^{(i+1)} &= x_{n,m}^{(i)} + \frac{\omega}{2(\hat{\alpha}_{n,m}^{(i)} + \hat{\gamma}_{n,m}^{(i)})} F_{n,m}^{(i)}; \quad y_{n,m}^{(i+1)} = y_{n,m}^{(i)} + \frac{\omega}{2(\hat{\alpha}_{n,m}^{(i)} + \hat{\gamma}_{n,m}^{(i)})} P_{n,m}^{(i)}, \\ \psi_{n,m}^{(i+1)} &= \psi_{n,m}^{(i)} + \frac{\omega}{2(\hat{\alpha}_{n,m}^{(i)} + \hat{\gamma}_{n,m}^{(i)})} Q_{n,m}^{(i)}; \quad F_{n,m}^{(i)} = (\hat{\alpha}\hat{x}_{\xi\xi} - 2\hat{\beta}\hat{x}_{\xi\eta} + \hat{\gamma}\hat{x}_{\eta\eta})_{n,m}^{(i)}, \\ P_{n,m}^{(i)} &= (\hat{\alpha}\hat{y}_{\xi\xi} - 2\hat{\beta}\hat{y}_{\xi\eta} + \hat{\gamma}\hat{y}_{\eta\eta})_{n,m}^{(i)}; \quad Q_{n,m}^{(i)} = (\hat{\alpha}\hat{\psi}_{\xi\xi} - 2\hat{\beta}\hat{\psi}_{\xi\eta} + \hat{\gamma}\hat{\psi}_{\eta\eta})_{n,m}^{(i)}, \end{aligned}$$

де i – номер ітерації; ω – релаксаційний параметр.

Даний ітераційний процес достатньо простий, але збіжність його досить повільна. Значне поліпшення процесу збіжності досягається завдяки вдалому заданню початкових наближень. При цьому використовують формули

$$\begin{aligned}x_{n,m} &= x_{n,0} + \frac{(x_{n,d} - x_{n,0})m}{d}; \\y_{n,m} &= y_{n,0} + \frac{(y_{n,d} - y_{n,0})m}{d}; \\\psi_{n,m} &= \psi_{n,0} + \frac{(\psi_{n,d} - \psi_{n,0})m}{d}.\end{aligned}$$

Отримавши розподіл функції течії, знаходимо поле швидкостей. Оскільки

(10)

Підставивши в рівності (10) замість похідних ξ_x , ξ_y , η_x , η_y їхнє вираження через y_η , x_η , y_ξ , x_ξ , отримаємо

$$\psi_x = \frac{y_\eta \psi_\xi - y_\xi \psi_\eta}{J_1}; \quad \psi_y = \frac{x_\xi \psi_\eta - x_\eta \psi_\xi}{J_1} \quad (11)$$

Отже, знайшовши значення для ψ та використавши відповідні співвідношення (9), обчислимо компоненти формул (11), а разом з тим ψ_x і ψ_y як складові вектори швидкості. Значення швидкості в фізичній площині отримаємо як модуль цього вектора, тобто

Складена універсальна програма числового розв'язування одночасно трьох рівнянь для кожного вузла параметричного прямокутника – автоматичної числової побудови загальної системи криволінійних координат, зв'язаної з тілом довільної форми, та розв'язування в канонічній (прямокутній) області поставленої задачі.

Так як гідроаеродинамічні характеристики даного типу обтікання циліндра обчислюються аналітично, то як модельну область розглянуто область, обмежену кривими $x^2 + y^2 = 1$ (внутрішня границя Γ_1) та $x^2 + y^2 = 100$ (зовнішня – Γ). На внутрішньому колі розміщувалося 60 точок ($c = 60$). З врахуванням модуля області – $d = 22$. Тому розрахунки проводилися на прямокутній області з кількістю вузлів 61×23 при $\epsilon = 10^{-4}$.

В таблиці для порівняння наведено результати розрахунку поля швидкостей, де x , y – координати точок на границі Γ_1 , \bar{V}_0 – відносна швидкість потоку, обчислена за формулами, \bar{V} – за наведеним методом.

Проведено розрахунок обтікання різних профілів крил. Зокрема, на симетричному профілі крила з відносною товщиною профілю в головному перерізі $\bar{c}_1 = 10\%$ розміщувалося 60 точок ($c = 60$). З врахуванням модуля області знайдено, що $d = 26$. На параметричному прямокутнику була розміщена 61×27 кількість вузлів, розрахунки проводилися при $\epsilon = 10^{-5}$.

На рис. 3 крива 1 побудована за теоретичними даними, взятими з роботи [3], крива 2 – за числовими розрахунками, проведеними вказаним методом. Значення тиску обчислене через відповідні значення швидкості.

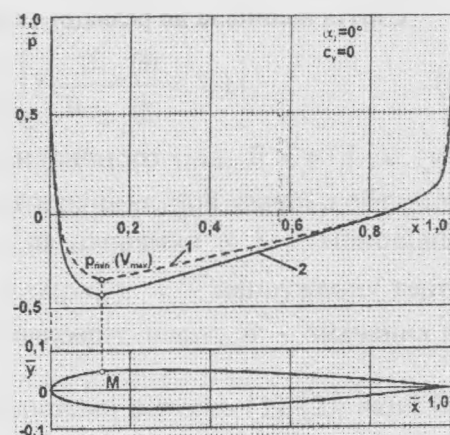


Рис. 3. Епюри розподілу тиску на профілі

Розподіл швидкостей на одиничному циліндрі

x	y	\bar{V}_0	\bar{V}
0,0000	1,0000	2,0000	2,0248
0,0990	0,9951	1,9902	2,0146
0,2000	0,9798	1,9596	1,9828
0,3030	0,9530	1,9060	1,9291
0,4020	0,9156	1,8312	1,8525
0,4970	0,8678	1,7356	1,7577
0,5830	0,8125	1,6250	1,6429
0,6650	0,7468	1,4936	1,5074
0,7480	0,6637	1,3274	1,3507
0,8050	0,5933	1,1866	1,1930
0,8650	0,5018	1,0036	1,0126
0,9130	0,4080	0,8160	0,8178
0,9540	0,2998	0,5996	0,6031
0,9850	0,1726	0,3452	0,3737
0,9970	0,0775	0,1550	0,1749
1,0000	0,0000	0	0,0021

Отримані результати свідчать про добре співвідношення їх з результатами, отриманими з використанням інших методів. Запропонований метод дозволяє проводити розрахунки при різних кутах атаки, точки на тілі можна розміщувати довільно (вони є вхідними даними програми), так як границі області відображаються на сторони добре впорядкованих прямокутників, та отримувати результати в бажаних точках. Зведення процесу розв'язування задачі на прямокутну область, не зважаючи на появу додаткових рівнянь, надає перевагу використанню даного методу.

Список літератури

1. *Thames F.C., Thompson J.F., Mastin C.W., Walker R.L.* Numerical Solutions for Viscous and Potential Flow about Arbitrary Two-Dimensional Bodies Using Body-Fitted Coordinate – Systems J.Computational Phys., 1977. – Vol. 24. – P. 245–273.
2. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Журн. вычислительной математики и мат. физики. – Т. 12. – 1972. – № 2. – С. 429–440.
3. *Мельников А.П.* Основы прикладной аэродинамики. – Л.: ЛКВВИА, 1959. – 581 с.

Стаття надійшла до редакції 17.04.01.